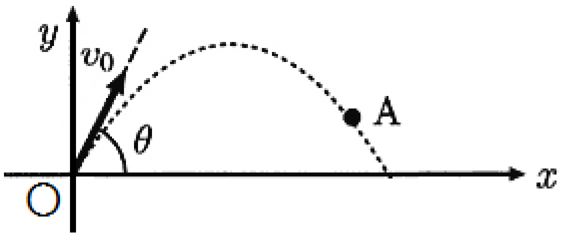
8. 放物運動



例えば左図のように、小球を水平面中の原点Oから速さv_O、θの仰角で投げた場合について考える。するとこの小球は重力によって軌道を変え、放物線を描き、再び水平面に達する。

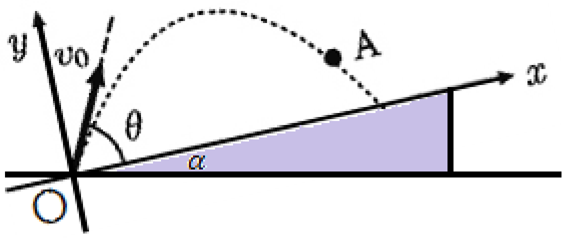
つまり**放物運動を司る力は、特別な環境下でない限り重力のみである**。

放物運動の基本解法は「**水平方向にx 軸、鉛直方向にy 軸を設ける**」である。それは放物運動が「**鉛直方向には重力がかかっているので等加速度運動するが、水平方向には何も力が働いていないので等速直線運動する**」のを、1 次元ずつ分解して考えるためである。

上の例において、水平方向にx軸、鉛直方向にy軸を取ると、それぞれの方向での加速度、速度、位置は以下のように表せる（運動学的方程式を利用する)。

$$a_x = -g \qquad v_x = v_0 cos\theta \qquad x = v_0 cos\theta \ \cdot t$$

$$a_y = 0 \qquad v_y = v_0 sin\theta + (-g)t \qquad y = v_o sin\theta \ \cdot t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$



次に左図のように、小球を水平面中の原点 O から角度αの坂道に対して速さv_O、θの仰角で投げた場合について考える。

もちろん水平方向にx 軸、鉛直方向にy 軸を設けることができるが、この場合は、斜面に対してx 軸、斜面と垂直な方向にy 軸を設けることもできる。

斜面に対してx 軸、斜面と垂直な方向にy 軸を設けたときの、のそれぞれの方向での加速度、速度、位置は以下の通りになる（運動学的方程式を利用)。

$$a_x = -gsin\alpha、a_y = -gcos\alpha$$

$$v_x = v_0 cos\theta + (-gsin\alpha)t、v_y = v_0 sin\theta + (-gcos\alpha)t$$

$$x = v_0 cos\theta \ \cdot t + \frac{1}{2}(-gsin\alpha)t、y = v_o sin\theta \ \cdot t + \frac{1}{2}(-gcos\alpha)t^2$$

求める物理量に応じて、座標の取り方を変える必要がある。

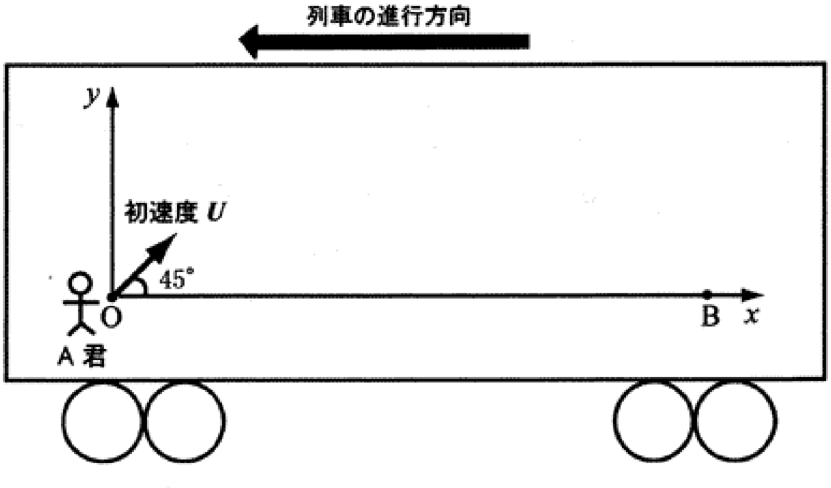
【8-例】岡山大学 2010 第一問

A 君が列車の中で投射運動の実験を行うことになった。以下の問いに答えよ。

b 走行する列車内で、質量mで大きさの無視できる物体を、列車の進行方向逆向きに投射する実験を行う。下図のように A 君の位置を原点 O とし、列車に固定された座標を考える。原点から距離Rだけ離れた点 B に向けて物体を放り投げて命中させることを考える。空気抵抗は無視し、重力加速度はgとする。

問 1　列車が水平方向に一定速度Vで走行中、A 君が水平と角度 45 度をなして初速度Uで斜め上方に物体を投げる場合、列車内で観測した時刻t秒後の位置のx座標とy座標を、V, U, t, g, mのうち必要なものを使ってそれぞれ求めよ。また、物体が図 1 中の B 点に命中するとき、初速度Uの大きさはいくらか。V, R, g, mのうち必要なものを使って表せ。ただし、物体は列車の天井や床に衝突しないものとする。

問 2　次に、下図の列車が進行方向に一定の加速度aで加速しているときに、A 君が水平と角度 45 度をなして初速度Uで斜め上方に物体を投げる場合を考える。この場合に物体が点 B に到達するためには、初速度Uの大きさはいくらでなければならないか。a, R, g, mのうち必要なものを使って表せ。また、原点 O から列車内の天井までの高さをHとすると、物体を天井に到達することなく点 B に命中させるためには、距離 R はいくらでなければならないか。a, R, g, m, Hのうち必要なものを使って表せ。



【8-1】北海道大学 2011 第一問

重力加速度大きさをg[m/s²]として、次の問いに答えよ。

問 1　図 1 のように、点 O を通る水平面上にx 軸、鉛直上向きにy 軸をとる。点 O より距離 H[m]だけ上の点 P から、質量m_A[kg]の質点（物体 A）を、$x-y$平面内でx軸の正の向きより角θ(鋭角)だけ上向きに、速さv_A[m/s]で投げ上げた。投射直後の物体 A の運動エネルギー、点 O を基準とした点 P での物体 A の重力による位置エネルギーをそれぞれ求めよ。また、この物体 A は投射後x軸上の点 Q に到達した。点 Q に到達した時の物体 A の速さも求めよ。

問 2　次に、図 2 のように時刻 0 に物体を、0 でない速度v_A [m/s]でx 軸正の向きに投げた。同じ時刻に、点 O よりx 軸正の向きに距離L[m]だけ離れた点 R から、質量m_B[kg]の質点（物体 B）を、鉛直上向きに速さv_A[m/s]で投げ上げた。時刻 t [s]で、物体 A から見た物体 B の相対速度のx成分、y成分はいくらか、それぞれ答えよ。また、物体 A から見た物体 B の運動を考えると、その軌道はどうなるかも説明せよ。

問 3　この後、物体 A は物体 B と衝突した。物体 A と物体 B の座標が一致することより、衝突する時刻はv_Aを用いてどのように表されるか。また、この場合のv_Bが満たすべき条件、衝突直前の物体 B の速度のy成分はv_Aを用いてどのように表されるか。それぞれ答えよ。

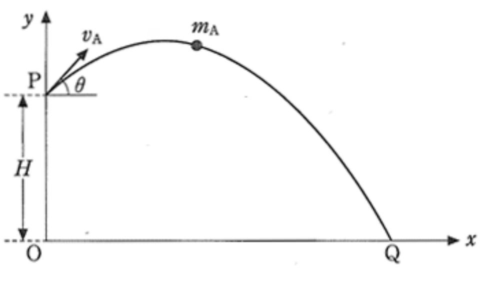


図 1

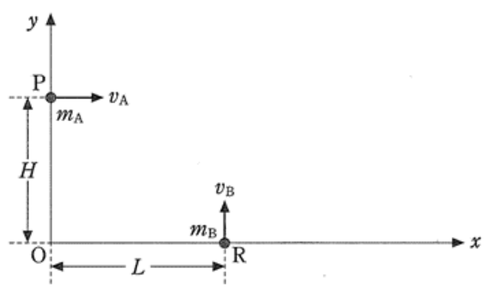
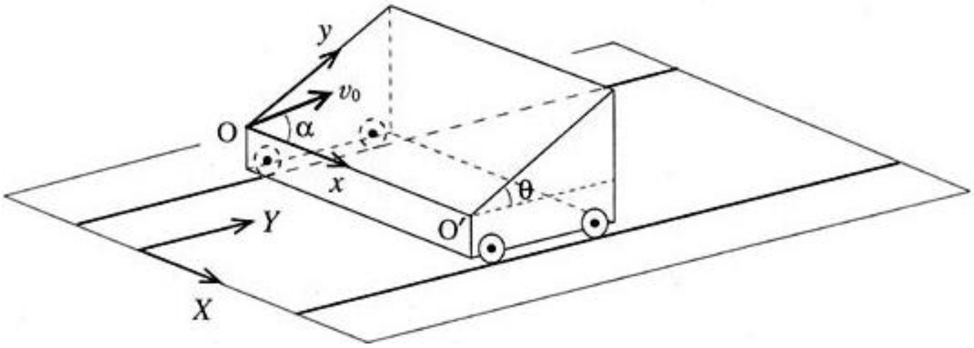


図 2

【8-2】京都大学 2000 第一問

下図のように、水平面と角度θをなす斜面を持った質量Mの台車が、水平な床面に敷かれた直線のレール上を摩擦なしに滑らかに動けるように置かれている。いま、時刻$t=0$に、台車の斜面の下端点 O から質量mの小球が、斜面に沿って、大きさv_Oの初速度で動き出した。このとき、台車の初速度はゼロで、小球の初速度の方向は、斜面の下端線 OO'から測った斜面内の仰角がαであった。ここで、下端線 OO'は床面に平行でレールと垂直である。

また、斜面は滑らかで、小球と斜面の間には摩擦はないとして、小球が動きだした後の小球および台車の運動を議論しよう。ただし、斜面は十分に広く、小球は再び斜面の下端線 OO'に戻ってくるまでは斜面から飛び出さず、また、台車の車輪は 4 つともレールから離れることはないと仮定する。床面に固定した水平面内の直交座標系のX, Y 軸、および台車に固定した斜面上に直交座標系のx, y 軸を、それぞれ下図のようにとる。ただし、Y軸はレールに、X 軸はx軸にそれぞれ平行で、x, y 軸の原点は下端点 O であり、y 軸は斜面の最大傾斜の方向を向いている。また、重力加速度はgとする。



(1) 小球が斜面上を運動している間、台車は床面から見て Y 方向に速度V、加速度Aで運動している。台車から見た小球の速度のx, y成分をv_x, v_y、加速度をa_x, a_yとする。床面から見て小球の速度の Y 成分はいくらか、V, v_x, θを使って表せ。また、小球と台車からなる系のY軸方向の運動量保存則を示す式を示し、その式の時間変化率を考えれば、速度の時間変化率が加速度であることから、台車の加速度Aと小球の加速度のy成分a_yとの間にどのような比例関係があるかを求めよ。

(2) 次に、斜面に固定した座標系に乗って小球の運動を考えよう。台車の加速度Aによる慣性力も考慮すると、小球のx成分、y成分の運動方程式をそれぞれ立式せよ。また、ここで(1)での運動量保存則の式よりAを消去し、小球のx方向、y方向の加速度をそれぞれg, M, m, θを用いて求めよ。

以下、$M=2m$、$\theta=30°$、$\alpha=45°$とし、解答にはm, g, v_O, tを用いよ。

(3) 時刻tでの小球の斜面上の位置(x, y)を求めよ。

(4) 小球が最高点に達する時刻$t=T$と、時刻$t=2T$での台車の速度Vを求めよ。